

2. VARGJET NUMERIKE

Detyra për ushtrime – PJESA 3

1. Të tregohet se vargu $a_n = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}$ është monoton zvogëlues.

Të shqyrtohet monotonia e vargjeve:

2. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. 3. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$. 4. $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$.
5. $a_n = 1 + \frac{1}{3^n}$. 6. $a_n = \frac{n^3}{n^2+5}$.

7. Provoni nëse vargjet:

a) $a_n = \frac{3^n+1}{3^n}$

b) $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} - \frac{n}{n+1} \cos(n-1)\pi \right)$

janë monotono zvogëluese.

8. Të tregohet se vargjet :

a) $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$

b) $a_n = \ln \left(2 - \frac{1}{n} \right)$

janë monoton rritëse.

9. Të tregohet se vargu $a_n = \frac{5^n}{n!}, n \geq 5, n \in \mathbb{N}$ është monotono zvogëlues.

10. Të shqyrtohet monotonia e vargjeve

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$.

11. Të shqyrtohet kufizueshmëria e vargjeve të dhëna në detyrat 2-6.

12. A janë të kufizuara vargjet:

a) $a_n = n \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$;

b) $a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\log n}, (n = 2, 3, \dots)$.

13. Të vërtetohet se vargu $a_n = 2^{\sqrt[3]{n}}$ është i pakufizuar.
14. Të shqyrtohet kufizueshmëria e vargut $a_n = \sqrt[n]{n!}$.
15. Të tregohet se vargu $x_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}}$ është i kufizuar.
16. Të vërtetohet më anë të përkufizimit se:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1;$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5}{3n} = \frac{2}{3};$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2 + 1} = 0;$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2;$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{n + 2} = -1;$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 4n^2 + 8}{2n^3 + 2n^2 + 4} = \frac{3}{2}.$

Të njehsohen limitet:

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - 4n + 3}).$ 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n).$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 3} - \sqrt{n}).$
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an + b} - \sqrt{an + c}), a > 0.$ 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}.$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin n!}{n^2 + 1}.$ 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right).$
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right).$
28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \dots + \frac{27}{100^n}\right).$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right). \quad 30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{4^n}}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n}. \quad 32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}.$$

32. Vargu i numrave a_0, a_1, \dots merret sipas kësaj rregulle:

- a_0, a_1 janë numra të dhënë.
- secili anëtar tjetër është gjysma e shumës së dy anëtarëve paraprak.

a) Të shprehet a_n përmes a_0 dhe a_1 .

b) Të njehsohet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$33. \text{ Nëse } S_n = \frac{2^{n+2} - 4}{2^n} \text{ të njehsohet } a_n \text{ dhe } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Të njehsohen limitet:

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(x + \frac{(n-1) \cdot a}{n} \right)^2 \right).$$

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}. \quad 36. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)}.$$

$$37. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a \sqrt{a \sqrt{a \dots \sqrt{a}}}} \quad (n\text{- rrënjë}).$$

$$38. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a \sqrt{b \sqrt{a \sqrt{b \dots \sqrt{a \sqrt{b}}}}}} \quad (2n\text{- rrënjë}).$$

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{a}{n} \right) \cdot \left(1 - \frac{b}{n} \right)} \right).$$

42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} + \dots + \arctan \frac{1}{2n^2} \right)$.
43. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.
44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$.
45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^h + b_1 n^{h-1} + \dots + b_h}, (a_0, b_0 \neq 0)$.
46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$.
47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n} \right)$.
48. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n(n+1)} \right)$.
49. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) + \dots + (1+x^{2^n}), |x| < 1$.
50. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$.
51. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 2}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + n}} \right)$.
52. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 1})$.
53. Të tregohet që $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
54. Të tregohet që $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0, (a > 1)$.
55. Të njehsohet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$.
56. Të tregohet se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.